РЕШЕНИЕ:

1. Решить систему уравнений $\begin{cases} y+\sqrt{16-x^2}=0 \\ y+1=|x+5| \end{cases}$ и найдите разность y_0-x_0 в полученных решениях

Решение: **1)** Возведем в квадрат обе части обоих уравнений, чтобы избавиться от корня и модуля:

$$\begin{cases} y^2=16-x^2 \\ (y+1)^2=|x+5|^2 \end{cases}$$

Упростим второе уравнение $(y+1+x+5)(y+1-x-5)=0 \Rightarrow$

$\Rightarrow\ y+x+6=0;\ \ y-x-4=0$

Подставим в первое уравнение:

а) при $y=-x-6$ получим $x^2+12x+36=16-x^2$, т.е. $x^2+6x+10=0.$ Нет решений, т.к. D<0

б) при $y=x+4$ получим: $x^2+8x+16=16-x^2$ или $x^2+4x=0,\ x_1=0;\ x_2=-4$ Тогда $y_1=-4;\ y_2=0$

Проверка: при $x=0$ и $y=-4$ имеем: $-4+\sqrt{16-0}=0 \Rightarrow -4+1\neq|5|;$

при $x=-4;\ y=0$ имеем: $\begin{cases} 0+\sqrt{16-16}=0, \\ 1=1 \end{cases}$

Значит, $x_0=-4;\ y=0$ и $y_0-x_0=4$

2). Графический. Единственное решение системы – это точка (-4; 0)

3). Найдем ОДЗ: $16-x^2>0\ \Rightarrow -4\le x \Rightarrow\ x+5\ge1\ \Rightarrow |x+5|=x+5\ge1\ \Rightarrow$ $\Rightarrow y+1 \Rightarrow |x+5|\ge1\ \Rightarrow y\ge0$

тогда $y+\sqrt{16-x^2}=0\ \Leftrightarrow\ \begin{cases} y=0 \\ 16-x^2=0 \end{cases}\ \Leftrightarrow\ x=\pm4$

Проверяем оба решения:

$0+1 \neq |4+5|$ и $0+1=|-4+5| \Rightarrow x=-4;\ y=0$

2. Решить уравнение $\sin^2 2x+\sin^2 4x=1-\dfrac{\cos 2x}{\cos 3x}$.

Решение: Исходное уравнение равносильно каждому из уравнений

$$\frac{1-\cos 4x}{2}+\frac{1-\cos 8x}{2}=1-\frac{\cos 2x}{\cos 3x},$$

$$\frac{\cos 4x+\cos 8x}{2}=\frac{\cos 2x}{\cos 3x},\quad \cos 6x\cdot\cos 2x=\frac{\cos 2x}{\cos 3x}$$

При условии, что $\cos 3x \neq 0$ получим $\cos 2x\left(\cos 3x\cdot\cos 6x-1\right)=0$, где

$\cos 2x=0$ когда $x=\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\pi k}{2};\ k\in Z$, а $\cos 3x\cdot\cos 6x=1$ может иметь корни

тогда, когда $\cos 3x=1 \Rightarrow x=\dfrac{2\pi n}{3}\ \ n\in Z$

3. Решить неравенство $\log_{\frac{1}{3}}\log_2\dfrac{x^2-|x|-12}{x+3}>0$

Решение: Исходное неравенство

$$1<\frac{x^2-|x|-12}{x+3}<2 \qquad (1)$$

а) Пусть $x>0$, тогда $x^2-|x|-12=(x-4)(x+3)$ и неравенство (1) примет вид $1<x-4<2 \Rightarrow 5<x<6$

б) Пусть $x<0$, тогда неравенство (1) примет вид

$$1<\frac{x^2+x-12}{x+3}<2 \qquad (2)$$

Если $-3 < x < 0$, то (2) равносильно $x+3 < x^2 + x - 12 < 2(x+3)$ или системе $\begin{cases} x^2 - x - 18 < 0 \\ x^2 - 15 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 < x < x_2 \\ |x| > \sqrt{15} \end{cases}$,

где $x_1 = \dfrac{1-\sqrt{73}}{2}$, $x_2 = \dfrac{1+\sqrt{73}}{2}$

Систем неравенств $\begin{cases} |x| > \sqrt{15} \\ -3 < x < 0 \end{cases}$ несовместна.

Если $x < -3$, то система (2) равносильна системе $\begin{cases} (x-x_1)(x-x_2) > 0 \\ |x| < \sqrt{15} \end{cases} \Rightarrow -\sqrt{15} < x < x_1$, т.к. $x_1 > -\sqrt{15}$

Ответ: $-\sqrt{15} < x < \dfrac{1-\sqrt{73}}{2}$; $5 < x < 6$

4. Найти все значения a, при которых уравнение $\sqrt{x-9} = ax + 7a - 3$ имеет единственное решение.

Решение: Пусть $x + 7 = t$, тогда получим уравнение

$$\sqrt{t-16} = a\,t - 3 \qquad (1)$$

Требуется найти все значения a, при которых графики $y = \sqrt{t-16}$ и $y = at - 3$ имеют при $t \geq 6$ единственную общую точку.

Если $a \leq 0$, то прямая $y = at - 3$ не имеет общих точек с параболой $y = \sqrt{t-16}$

Возведем обе части (1) в квадрат и получим

$$a^2t^2 - (6a+1)t + 25 = 0 \qquad (2)$$

Для полученного уравнения при D=0 найдем значения параметра a, при котором уравнение (2) имеет единственный корень $D = (6a+1)^2 - (10a)^2 = 0$ это уравнение имеет единственный корень $a > 0$, $a = \dfrac{1}{4}$.

5. Упростить и вычислить $\sqrt[3]{9+\sqrt{80}}+\sqrt[3]{9-\sqrt{80}}$

Решение: Обозначим $\sqrt[3]{9+\sqrt{80}}+\sqrt[3]{9-\sqrt{80}}=\mathrm{A}$

$$\mathrm{A}^3=9+\sqrt{80}+3\left(\sqrt[3]{9+\sqrt{80}}\right)^2\sqrt[3]{9-\sqrt{80}}+3\cdot\sqrt[3]{9+\sqrt{80}}\left(\sqrt[3]{9-\sqrt{80}}\right)^2+9-\sqrt{80}=$$
$$=18+3\sqrt[3]{\left(9+\sqrt{80}\right)\cdot\left(9-\sqrt{80}\right)}\cdot\left[\sqrt[3]{9+\sqrt{80}}+\sqrt[3]{9+\sqrt{80}}\right]=18+3\sqrt[3]{81-80}\cdot\mathrm{A}=$$
$$=18+3\mathrm{A}\ \Rightarrow\ \mathrm{A}^3-3\mathrm{A}-18=0\ \Rightarrow\ \mathrm{A}=3,\text{т.е.}$$
$$(\mathrm{A}-3)\left(\mathrm{A}^2+3\mathrm{A}+6\right)=0\ \Rightarrow\ \mathrm{A}=3$$

6. В равнобедренную трапецию вписан круг. Одна из боковых сторон делится точкой касания на отрезки длиной m и n. Определить площадь трапеции.

Решение:

$$\mathrm{BC}=2\mathrm{n}\quad \mathrm{AB}=\mathrm{m}+\mathrm{n};\quad \mathrm{AD}=2\mathrm{m}\quad \mathrm{AM}=\frac{1}{2}(\mathrm{AD}-\mathrm{BC})=\mathrm{m}-\mathrm{n}$$
$$\mathrm{BM}=\sqrt{\mathrm{AB}^2-\mathrm{AM}^2}=\sqrt{(\mathrm{m}+\mathrm{n})^2-(\mathrm{m}-\mathrm{n})^2}=$$
$$=\sqrt{\mathrm{m}^2+2\mathrm{mn}+\mathrm{n}^2-\mathrm{m}^2+2\mathrm{mn}-\mathrm{n}^2}=2\sqrt{\mathrm{mn}}$$

Тогда $\mathrm{S}_{\mathrm{ABCD}}=\dfrac{\mathrm{AD}+\mathrm{BC}}{2}\cdot\mathrm{BM}=\dfrac{2\mathrm{m}+2\mathrm{n}}{2}\cdot2\sqrt{\mathrm{mn}}$

$$\mathrm{S}_{\mathrm{ABCD}}=\frac{\mathrm{AD}+\mathrm{BC}}{2}\cdot\mathrm{BM}=\frac{2\mathrm{m}+2\mathrm{n}}{2}\cdot2\sqrt{\mathrm{mn}}=(\mathrm{m}+\mathrm{n})\cdot2\sqrt{\mathrm{mn}}$$

7. Сумма третьего и девятого членов арифметической прогрессии равна 8. Найти сумму одиннадцати первых членов этой прогрессии.

Решение: $a_3+a_9=8$, тогда $a_4+a_8=8$; $a_5+a_7=8$, тогда $a_6=4$; $a_2+a_{10}=8$; $a_1+a_{11}=8$. В результате $\sum a_{11}=4+8\cdot5=44$.

8. В прямоугольной системе координат дана точка P(1, 2). Провести через эту точку прямую так, чтобы она образовала вместе с положительными осями координат треугольник наименьшей площади.

<u>Решение:</u> Пусть прямая AB имеет уравнение $y = kx + a$. $S_{\Delta AOB} = \frac{1}{2} OB \cdot OA;\ OB = b;\ OA = a.$ Так как ΔMPB подобен ΔOAB, то $\frac{a}{b} = \frac{2}{b-1}$ отсюда $a = \frac{2b}{b-1}$. Тогда $S(b) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2b}{b-1} \cdot b = \frac{b^2}{b-1}$, где $b > 1$.

$$S'(b). = \frac{2b(b-1) - b^2}{(b-1)^2} = \frac{b(b-2)}{(b-1)^2};\ S'(b) = 0 \text{ на } (1; +\infty) \text{ при } b = 2.$$

Тогда $a = 4$. Уравнение прямой $AB: \frac{x}{2}. + \frac{y}{4} = 1$ или $y = -2x + 4$.